

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与

搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

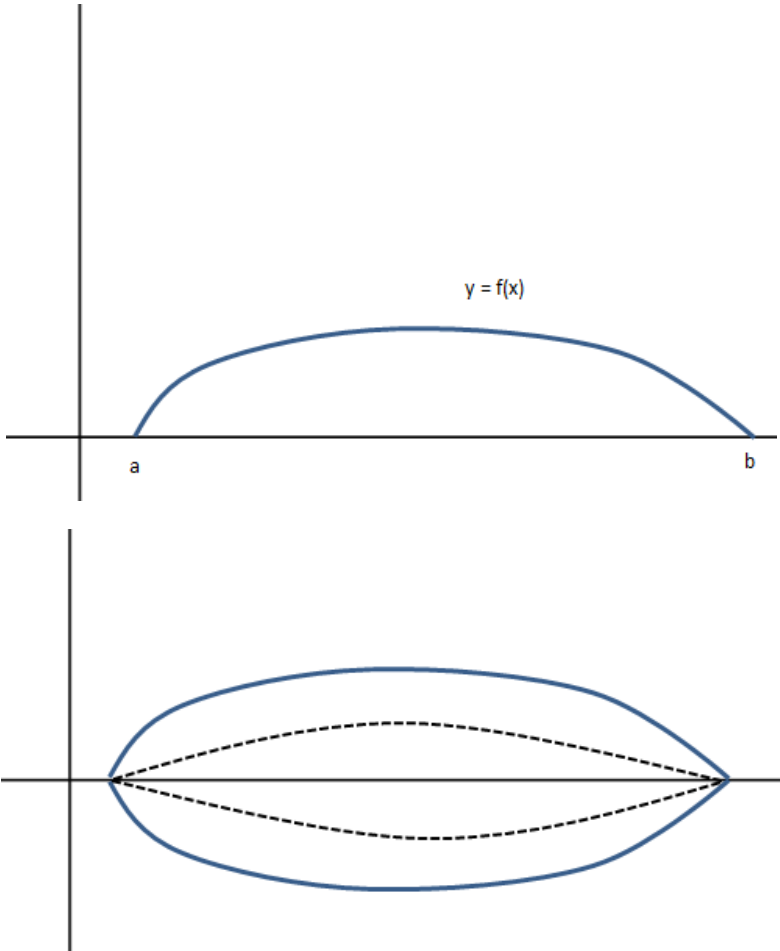
积分 - 457097
排名 - 1198

单变量微积分笔记17——定积分的应用2（体积）

定积分除了计算面积外，还可以应用在计算体积上。

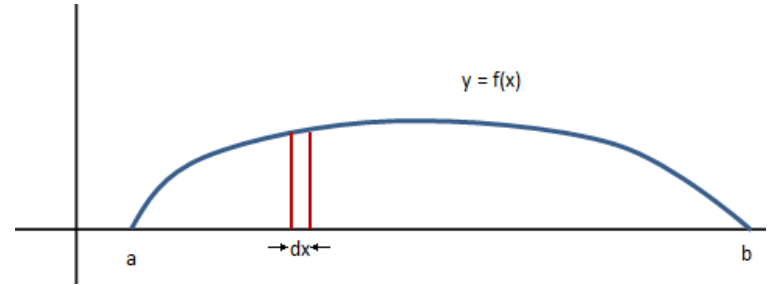
圆盘法

一条曲线 $y = f(x)$ ，如果曲线绕 x 轴旋转，则曲线经过的区域将形成一个橄榄球形状的体积，如下图所示：



曲线绕x轴旋转一周

现在要计算体积。我们依然按照黎曼和切片的思路去计算，只不过这回需要一点想象力。



将上图的矩形绕 x 轴旋转一周将得到一个半径为 y ，高度为 dx 的圆盘：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

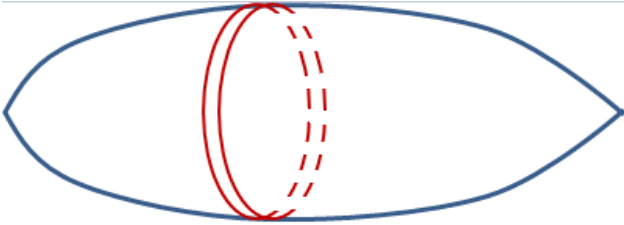
- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



矩形框绕x轴旋转一周

该圆盘的面积 $S(x) \approx \pi(f(x))^2$ ，体积： $\Delta v \approx S(x)\Delta x$ ，如果将整个图形的体积切成n个圆盘：

$$V = \int_a^b S(x)dx \approx \sum_{i=1}^n S_i \Delta x$$

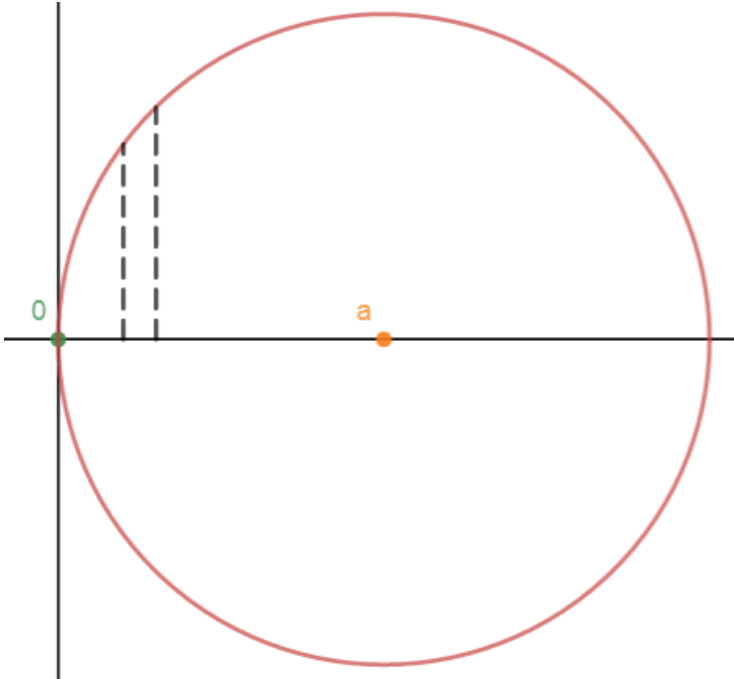
这就是圆盘法。

示例

求半径为a的球的体积。

通过球体的公式可知， $V = \pi a^3(4/3)$ ，假设我们不知道这个公式，使用圆盘法求解。

先将球体的最大横截面投影到直角坐标系上，在对圆的上半部分切割，旋转，如下图所示：



圆盘的底面积 $\approx \pi y^2$ ，由此可以得到球体体积：

$$V = \int_0^{2a} \pi y^2 dx$$

还需要将y转换为x。根据上图中圆的公式 $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ ，可得出 $y^2 = 2ax - x^2$ ，于是：

$$V = \int_0^{2a} \pi(2ax - x^2) dx = \pi(ax^2 - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^{2a} = \frac{4\pi a^3}{3}$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)
很nice

--尹保棕

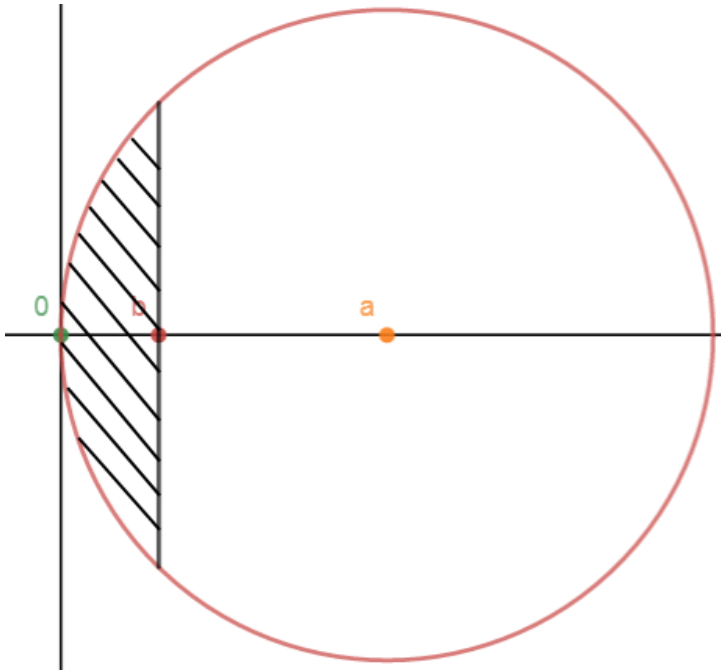
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
\$v = \{2gh\}^{1/2}\$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

实际上我们得到了更多的信息，如果仅计算部分球体的体积，依然可以使用上面的结论，仅改变积分上限即可，如下图所示：



$$V = \int_0^b \pi(2ax - x)^2 dx = \pi(ax^2 - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^b$$

实际上可以把 $V = \pi(ax^2 - x^3/3)$ 看作球体切片的公式。

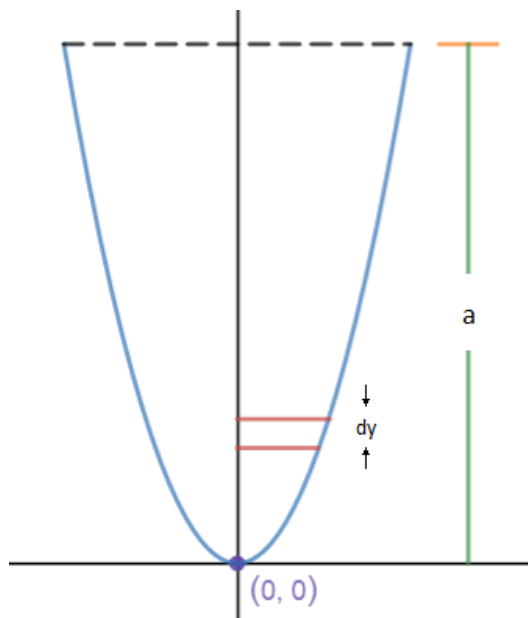
壳层法

假设坩埚内壁的横截面曲线是 $y = x^2$ ，深度是a，计算坩埚的容积。



计算坩埚的容积

我们依旧可以使用圆盘法计算，这次是绕y轴旋转：

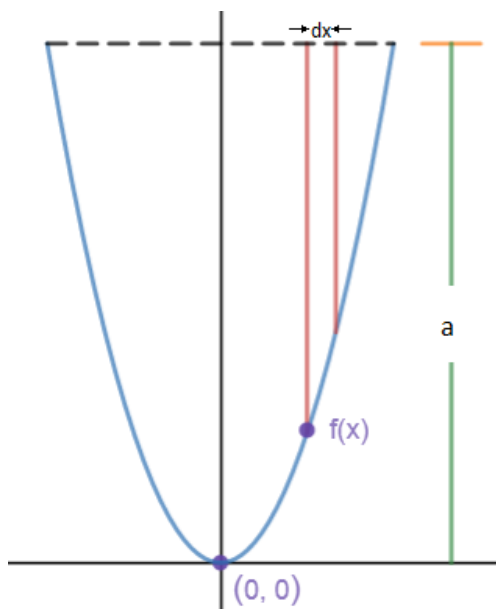


圆盘法

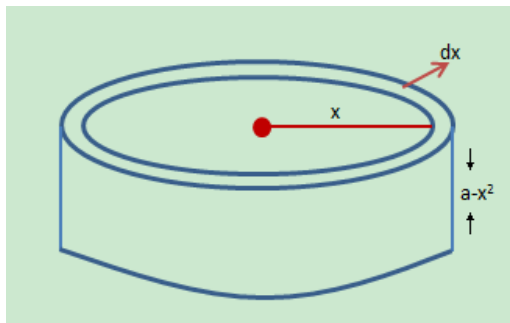
圆盘的高度是 Δy ，所以需要将原函数转换成 y 关于 x 的函数，在正半轴上， $x = y^{1/2}$

$$V = \int_0^a \pi \sqrt{y}^2 dy = \frac{\pi y^2}{2} \Big|_0^a = \frac{\pi a^2}{2}$$

对于本例来说，圆盘法没有问题，如果曲线的公式再复杂一点，就需要在反函数的转换上耗费时间，如果我们直接纵向切割，使用 dx 代替 dy ，就无需对原函数进行转换：



矩形绕 y 轴旋转一周将得到一个圆环，其厚度是 dx ，半径是 x ，高度是 $a - x^2$ ，如下图所示：



如果展开圆环，将得到一个底面积是圆环周长，高度是 dx 的长方体，其体积：

$$v = 2\pi x(a - x^2)dx = 2\pi(ax - x^3)dx$$

由此，坩埚的容积是：

$$V = \int_0^{\sqrt{a}} 2\pi(ax - x^3)dx = 2\pi \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{a}} = \frac{\pi a^2}{2}$$

单位产生的悖论

在计算坩埚的容积时，我们最终得到 $V = \pi a^2/2$ ，如果坩埚深度是1m，代入公式得到 $\pi/2$ (m^3)；现在将1m换成100cm，因为高度是一样的，所以我们期待得到同样的结果，但是代入公式后，最终得到 $10000\pi/2$ (cm^3) = $0.01\pi/2$ (m^3) 相差了100倍！这回有意思了。

问题出在哪呢？仔细观察最终结果的积分形式：

$$V = \int_0^{\sqrt{a}} 2\pi(ax - x^3)dx$$

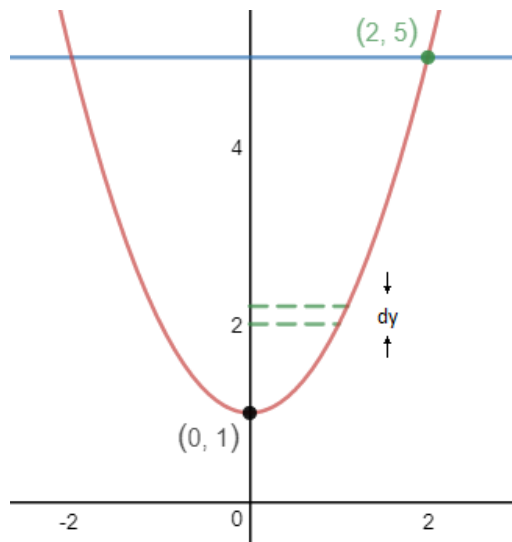
积分的上限是 $a^{1/2}$ ， $1^{1/2} = 1$ ， $100^{1/2} = 10$ ，因此单位不同将得到不同的结果。实际上这个公式违背了比例原则，将所有问题数学化的同时并没有考虑到物理学中的量纲。这就好比重力加速度是9.8，但这个9.8是有单位的，单位是米每二次方秒，如果长度单位采用厘米，这个常数9.8也需要相应变化才能适用。

示例

示例1

求 $y = 5$ 和 $y = x^2 + 1$ 所围图形绕 y 轴旋转后得到的体积。

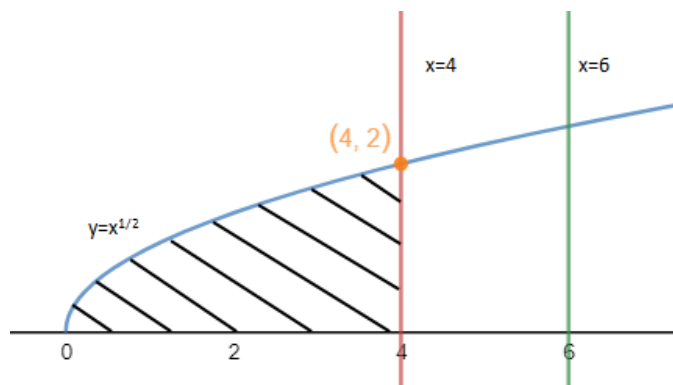
用圆盘法计算，圆盘绕 y 轴旋转，如下图所示：



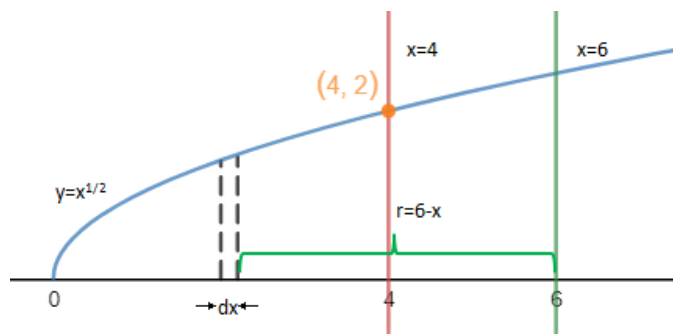
$$V = \int_1^5 \pi x^2 dy = \int_1^5 \pi (y-1) dy = \pi \int_1^5 (y-1) dy$$

示例2

求 $x=4$ 和 $y=x^{1/2}$, x 轴所围图形绕 $x=6$ 旋转后得到的体积。



本例根据壳层法计算, 如下图所示:



壳层 (或圆环) 的高是 $x^{1/2}$, 半径是 $6 - x$, 厚度是 dx :

$$V = \int_0^4 2\pi(6-x)\sqrt{x} dx = 2\pi \left(4x^{3/2} - \frac{2x^{5/2}}{5} \right) \Big|_0^4$$

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [圆盘法](#), [壳层法](#), [比例原则](#)

[好文要顶](#)

[关注我](#)

[收藏该文](#)

[我是8位的](#)
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [连通问题](#)
» 下一篇: [同桌的你](#)

posted on 2017-11-07 23:26 [我是8位的](#) 阅读(5803) 评论(1) [编辑](#) [收藏](#) [举报](#)

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

WebForms升级到ASP.NET Core

fineui.com

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日~3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房

- 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes